8 Stereometrie

> Římský vojevůdce Marcellus nám oznamuje, že zvítězí nad Syrakusami dříve, než bude měsíc v úplňku. Uvidíme. Možná bude celé jeho loďstvo v plamenech dřív, než uvidí naše hradby. Zkusím ho porazit jednou hezkou geometrickou větou….
>
> (Archimedes)

8.1 Polohové vlastnosti v prostoru

V kapitole 1.4 jsme uvedli základní geometrické pojmy – bod, přímka a rovina, vysvětlili jsme rovněž pojem geometrického útvaru jako množiny bodů. Vysvětlili jsme též pojem incidence. Dále jsme se však zabývali pouze útvary, které jsou podmnožinami roviny – rovinnými geometrickými útvary. Nyní se budeme zabývat útvary, které nelze umístit do roviny, a vztahy mezi těmito útvary, tj. prostorovými útvary a prostorovými vztahy.

Základní vztahy mezi prostorovými útvary:

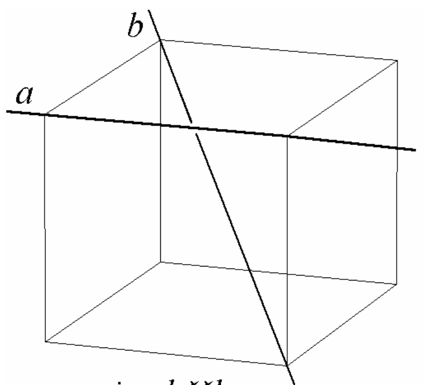
1) Ke každé přímce lze daným bodem v prostoru vést právě jednu rovnoběžku.
2) Dvěma různými body AB prochází právě jedna přímka p (je jimi jednoznačně určena). Píšeme $p \equiv \overleftrightarrow{AB}$.
3) Leží-li dva body A, B v rovině α, pak v této rovině leží i přímka $p \equiv \overleftrightarrow{AB}$.
4) Daným bodem A a danou přímkou p, $A \notin p$, prochází (je určena) právě jedna rovina.
5) Třemi různými body $A; B; C$, které neleží na téže přímce, prochází (je určena) právě jedna rovina.
6) Dvěma různými přímkami, které mají společný bod (různoběžkami), prochází (je určena) právě jedna rovina.
7) Mají-li dvě různé roviny společný bod, pak mají společnou celou přímku (průsečnici), která tímto bodem prochází. Mimo průsečnici již nemají žádný společený bod.

Vzájemná poloha přímek a rovin:

Dvě přímky v prostoru:
- neleží v jedné rovině (mimoběžky)
- leží v téže rovině:
  - žádný společný bod (přímky rovnoběžné různé)
  - jeden společný bod (přímky různoběžné)
  - všechny společné body (přímky rovnoběžné splývající).

Přímka a rovina v prostoru:
- žádný společný bod (přímka je rovnoběžná s rovinou a neleží v ní)
- jeden společný bod (přímka je různoběžná s rovinou)
- všechny společné body (přímka leží v rovině).

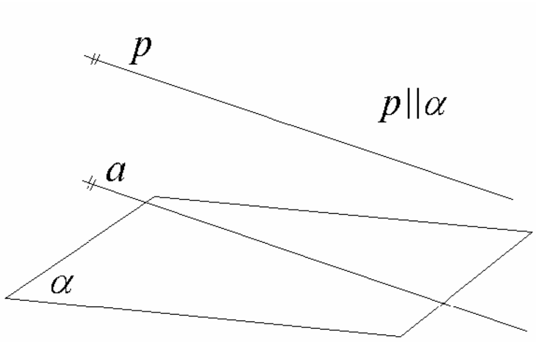
Dvě roviny v prostoru
- žádný společný bod (roviny rovnoběžné různé)
- společná právě jedna přímka (roviny různoběžné)
- společné všechny body (roviny rovnoběžné splývající).



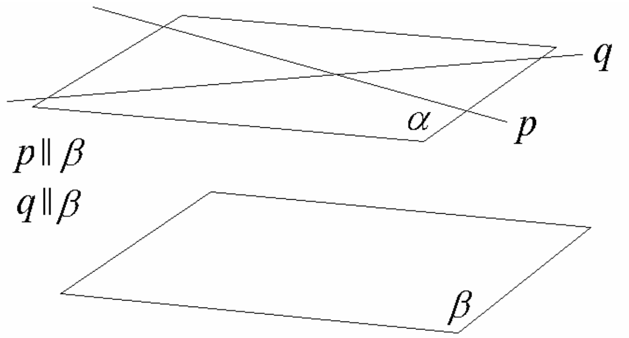
mimoběžky

Poloprostor: Každá rovina rozděluje prostor na dva opačné poloprostory, jejichž průnikem je právě hraniční rovina. Každý poloprostor je určen hraniční rovinou a bodem, který na ní neleží (vnitřním bodem). Poloprostor určený hraniční rovinou α a vnitřním bodem B značíme $\overrightarrow{\alpha B}$.

Vrstva: Nechť jsou dány dvě rovnoběžné roviny $\alpha;\beta$ a body $A\in\alpha; B\in\beta$. Vrstvou rozumíme množinu $\overrightarrow{\alpha B}\cap\overrightarrow{\beta A}$. Roviny $\alpha;\beta$ nazýváme hraničními rovinami vrstvy.



přímka rovnoběžná s rovinou



rovnoběžné roviny

Rovnoběžnost přímek a rovin:

Bodem A prochází právě jedna rovina rovnoběžná s danou rovinou α.
Pro každé tři přímky p,q,r a každé tři roviny α,β,γ platí:

$$(p\,\|\,q)\wedge(q\,\|\,r)\Rightarrow(p\,\|\,r) \qquad (p\,\|\,q)\wedge(p\,\|\,\alpha)\Rightarrow(q\,\|\,\alpha)$$

$$(\alpha\,\|\,\beta)\wedge(\beta\,\|\,\gamma)\Rightarrow(\alpha\,\|\,\gamma) \qquad (\alpha\,\|\,\beta)\wedge(\beta\,\|\,p)\Rightarrow(\alpha\,\|\,p)$$

Postačující podmínky (kriteria) rovnoběžnosti:

Přímka p je rovnoběžná s rovinou α právě tehdy, když v rovině α leží přímka q rovnoběžná s p.

Roviny $\alpha;\beta$ jsou rovnoběžné právě tehdy, když v rovině α leží dvě různoběžky, z nichž každá je rovnoběžná s rovinou β.

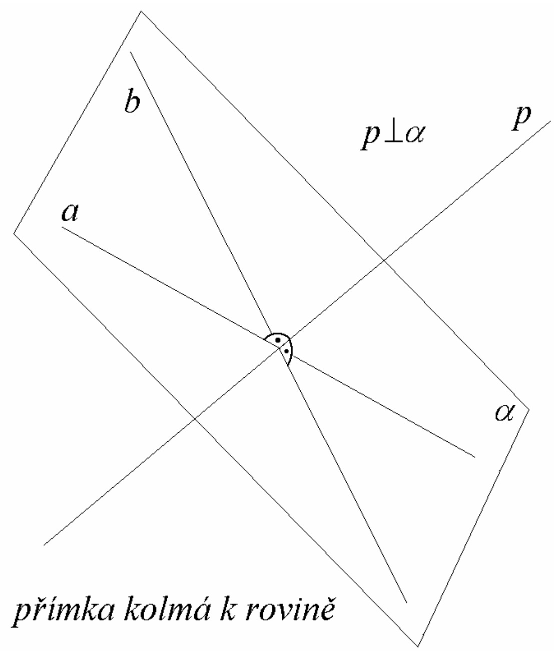
8.2 Metrické vlastnosti v prostoru

Odchylka dvou přímek: Odchylkou dvou přímek v rovině rozumíme velikost pravého, ostrého nebo nulového úhlu, který tyto přímky svírají. V prostoru se tento pojem rozšiřuje i na mimoběžné přímky. Toto rozšíření se opírá o následující větu:

Nechť $p_1;q_1$ jsou různoběžky, $p_2;q_2$ různoběžky takové, že $p_1\,\|\,p_2; q_1\,\|\,q_2$. Pak odchylka přímek $p_1;q_1$ je rovna odchylce přímek $p_2;q_2$.

Odchylkou dvou mimoběžek $p;q$ rozumíme odchylku různoběžek $p';q'$ vedených v prostoru libovolným bodem tak, že $p \parallel p'; q \parallel q'$.
(v důsledku předešlé věty tato odchylka nezávisí na volbě průsečíku různoběžek $p';q'$).

Přímky kolmé v prostoru: dvě přímky $p;q$ jsou navzájem kolmé právě tehdy, když jejich odchylka je $\frac{\pi}{2}$. (Odchylka je definována i pro mimoběžky – i ty tedy mohou být navzájem kolmé).



Kolmost přímky a roviny: Přímka p je kolmá k rovině α právě tehdy, když je kolmá ke všem přímkám, které v této rovině leží.

O kolmosti přímky a roviny platí následující věty:

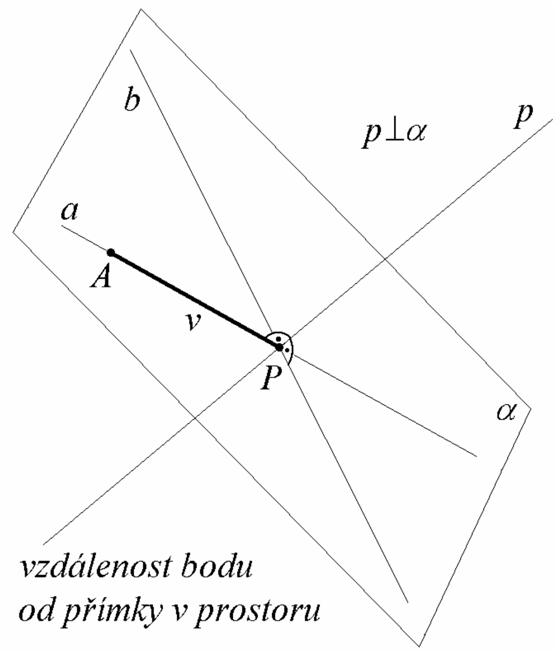
Postačující podmínka (kriterium) kolmosti přímky a roviny: Přímka je kolmá k rovině právě tehdy, když je kolmá ke dvěma různoběžkám této roviny.

Daným bodem lze k dané rovině vést právě jednu kolmici.

Daným bodem lze k dané přímce vést právě jednu kolmou rovinu.

Všechny kolmice k téže rovině jsou vzájemně rovnoběžné.

Všechny roviny kolmé k téže přímce jsou vzájemně rovnoběžné.



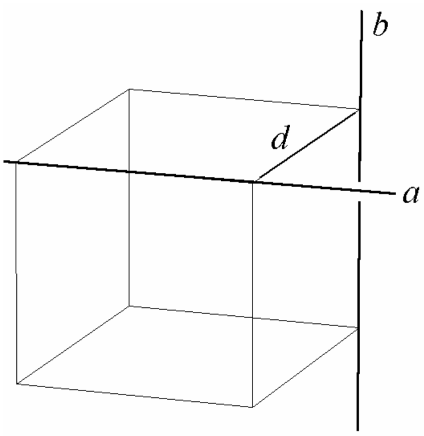
Pojem kolmosti rozšiřujeme i na polopřímku $\overrightarrow{AB}$, resp. úsečku AB, o kterých říkáme, že jsou kolmé k přímce (polopřímce, rovině), je-li k těmto útvarům kolmá přímka $p \equiv AB$ (analogicky rozšiřujeme i pojem odchylky).

Vzdálenosti bodu A od přímky p v prostoru je vzdálenost v bodu A od bodu P, kde bod P je průsečík přímky p s rovinou kolmou k přímce p a procházející bodem A.

Vzdálenost dvou rovnoběžek je rovna jejich vzdálenosti v rovině, kterou tyto rovnoběžky určují (splývající rovnoběžky mají vzdálenost rovnu nule).

Příčka mimoběžek: je libovolná přímka různoběžná s oběma mimoběžkami

Vzdálenost dvou mimoběžek: je délka úsečky, jejíž krajní body jsou průsečíky příčky kolmé k oběma mimoběžkám s těmito mimoběžkami.



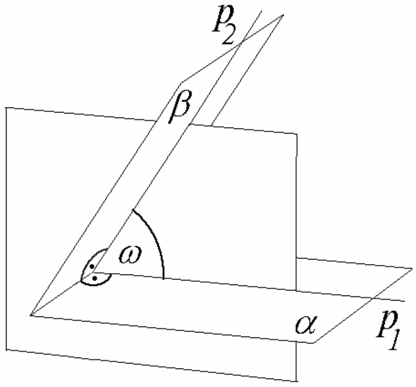
vzdálenost mimoběžek

Vzdálenost bodu A **od roviny** α je vzdálenost bodu A od paty P kolmice vedené z bodu A na tuto rovinu.

Vzdálenost přímky a **od roviny** α s ní rovnoběžné je vzdálenost libovolného bodu $A \in a$ od roviny α.

Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin je vzdálenost libovolného bodu jedné roviny od roviny druhé.

Odchylka dvou rovin $\alpha;\beta$ je rovna odchylce průsečnic $p_1; p_2$ těchto rovin s libovolnou rovinou, která je kolmá na obě roviny $\alpha;\beta$ (nebo též odchylce přímek $a;b$, kde $a \perp \alpha; b \perp \beta$).



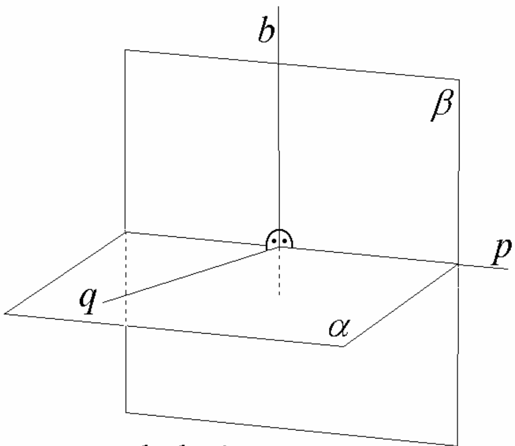
odchylka dvou rovin

Věty o kolmosti přímek a rovin:

Postačující podmínka (kriterium) kolmosti dvou rovin: Roviny $\alpha;\beta$ jsou navzájem kolmé právě tehdy, když v rovině β leží kolmice k rovině α.

Jsou-li roviny $\alpha;\beta$ různoběžné a obě kolmé k rovině γ, pal průsečnice rovin $\alpha;\beta$ je kolmá k rovině γ.

Jsou-li přímka p a rovina α kolmé k rovině β, pak jsou vzájemně rovnoběžné.



kolmé roviny

Je-li přímka p rovnoběžná s rovinou α a zároveň kolmá k rovině β, pak $\alpha \perp \beta$

Pravoúhlý průmět bodu P **do roviny** α je pata kolmice P_0 spuštěná z bodu P na rovinu α.

Pravoúhlý průmět útvaru U **do roviny** α je množina U_0 všech pravoúhlých průmětů bodů útvaru U do roviny α.

Odchylka přímky p **od roviny** α je odchylka této přímky od jejího pravoúhlého průmětu do roviny α.

Shodné zobrazení v prostoru je prosté zobrazení, v němž pro každé dva body $X;Y$ v prostoru a jejich obrazy $X';Y'$ platí $|XY| = |X'Y'|$.

Shodné útvary v prostoru: Dva útvary $U;U'$ v prostoru nazýváme shodné právě tehdy, když existuje shodné zobrazení v prostoru takové, že útvar U' je obrazem útvaru U.

8.3 Geometrická tělesa

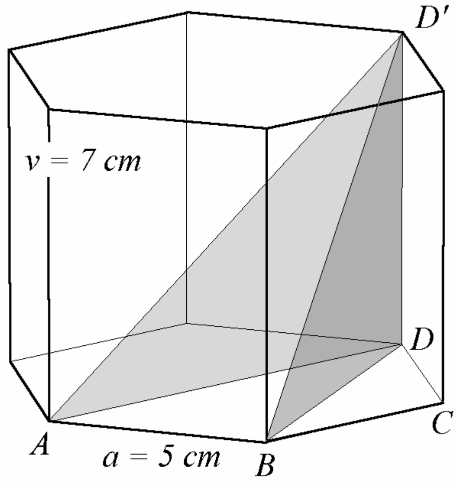
Geometrickým tělesem (dále jen **tělesem**) rozumíme souvislou množinu bodů v prostoru ohraničenou uzavřenou plochou (**hranicí, povrchem tělesa**), která do této množiny rovněž patří.

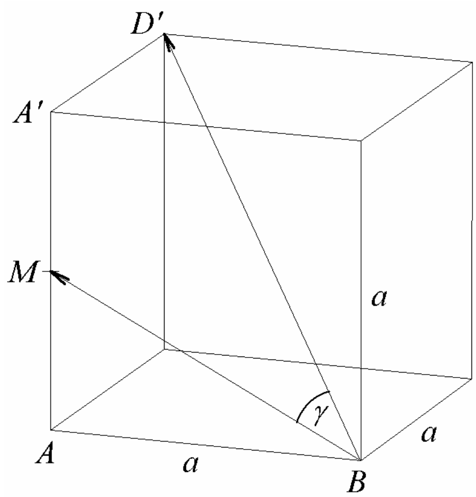
Pojem povrch tělesa budeme používat také ve smyslu obsah hranice tělesa.

Hranolová plocha, hranol: Nechť je dán konvexní n-úhelník $A_1A_2....A_n$ a přímka s různoběžná s rovinou, v níž tento n-úhelník leží. Sjednocení všech bodů ležících na všech přímkách rovnoběžných s s a protínajících n-úhelník $A_1A_2....A_n$ nazýváme **hranolovým prostorem**. Sjednocení bodů ležících na přímkách rovnoběžných s s a protínajících obvod n-úhelníka $A_1A_2....A_n$ nazýváme **hranolovou plochou**. Průnik hranolového prostoru s vrstvou, jejíž hraniční roviny jsou rovnoběžné s rovinou mnohoúhelníka $A_1A_2....A_n$, nazýváme **hranolem**. Povrch hranolu je tvořen dvěma mnohoúhelníky - **podstavami** a n rovnoběžníky - **bočními stěnami**. Sjednocení všech bočních stěn se nazývá **plášť hranolu**. Průnik dvou bočních stěn se nazývá boční hrana, průnik boční stěny a podstavy pak **podstavná hrana**. Vzdálenost podstavných rovin se nazývá **výška hranolu**.

Kolmý hranol – je hranol, jehož boční hrany jsou kolmé k podstavám.

Kvádr – hranol, jehož všechny stěny (včetně podstav) jsou obdélníky





Krychle – kvádr, jehož všechny stěny jsou čtverce.

1. Příklad: Vypočtěme velikosti tělesových úhlopříček $AD'; BD'$ pravidelného šestibokého hranolu, je-li podstavná hrana $a = 5\ cm$ a boční hrana $b = 7\ cm$.

Řešení: Máme vypočítat přepony pravoúhlých trojúhelníků ADD'; BDD' (viz připojený obrázek). Protože $|DD'| = v = 7\ cm$; $|AD| = 2a = 10\ cm$; je:

$$|AD'| = \sqrt{|AD|^2 + |DD'|^2} = \sqrt{10^2 + 7^2} \approx 12,21.$$

Ke zjištění délky úhlopříčky BD' potřebujeme znát velikost $|BD|$. Tu zjistíme jako odvěsnu v pravoúhlém trojúhelníku ABD:

$$|BD| = \sqrt{|AD|^2 - |AB|^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3},$$

Tedy:

$$|BD'| = \sqrt{|BD|^2 + |DD'|^2} = \sqrt{(5\sqrt{3})^2 + 7^2} = \sqrt{124} \approx 11,14$$

2. Příklad: Označme M střed hrany AA' krychle. Určeme odchylku tělesové úhlopříčky BD' od přímky MB.

Řešení: Zde bude výhodné využít aparátu vektorového počtu, a sice vzorce pro úhel dvou vektorů. Ten jsme v kpt. 7.2. uvedli jen pro vektor v rovině, platí¨však i v prostoru. Umístíme-li počátek souřadné soustavy do bodu B a souřadné osy do hran krychle, je $\overrightarrow{BM} = (u_1; u_2; u_3) = \left(-a; 0; \frac{a}{2}\right)$; $\overrightarrow{BD'} = (v_1; v_2; v_3) = (-a; -a; -a)$. Tedy:

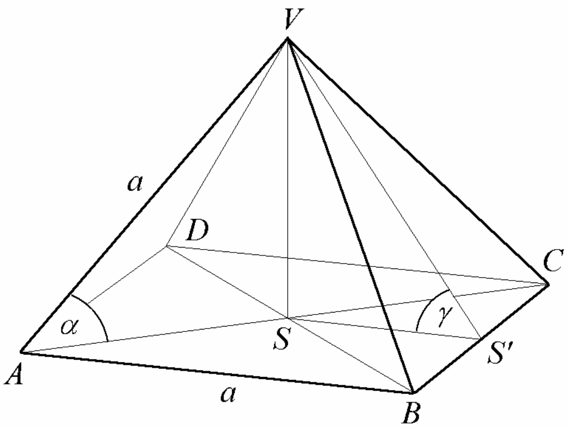
$$\cos\gamma = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_1^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_1^2}} = \frac{a^2 + 0 - \frac{a^2}{2}}{\sqrt{a^2 + 0^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{a^2 + a^2 + a^2}} = \frac{\sqrt{15}}{15} \Rightarrow \gamma \approx 75^{\circ}$$

Jehlanová plocha, jehlan: Nechť je dán konvexní n-úhelník $A_1A_2....A_n$ a bod V, který neleží v jeho rovině. Sjednocení všech bodů ležících na všech přímkách procházejících bodem V a protínajících n-úhelník $A_1A_2....A_n$ nazýváme **jehlanovým prostorem**, bod V se nazývá jeho **vrchol**. Sjednocení všech bodů ležících na všech přímkách procházejících bodem V a protínajících obvod n-úhelníka $A_1A_2....A_n$ nazýváme **jehlanovou plochou**, bod V se nazývá její **vrchol**.

Průnik jehlanového prostoru s vrstvou, jejíž jedna hraniční rovina prochází vrcholem rovnoběžně s rovinou n-úhelníka $A_1A_2....A_n$, se nazývá jehlan. Pojmy podstava, boční stěna, hrana, vrchol, výška definujeme analogicky jako u hranolu.

3. Příklad: Je dán pravidelný čtyřboký jehlan, jehož podstavné i boční hrany mají shodnou velikost a. Vypočtěme

a) odchylku boční stěny od roviny podstavy
b) odchylku boční hrany od roviny podstavy



Řešení:

a) Úsečka VS' je výškou v rovnostranném ΔBCV o straně a. Je tedy:

$|VS'| = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}a}{2}$. Protože $|SS'| = \frac{a}{2}$, je

$$\cos\gamma = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \gamma \approx 54^{\circ}45'.$$

b) Úsečka AS je polovinou úhlopříčky čtverce o straně a, tedy $|AS| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

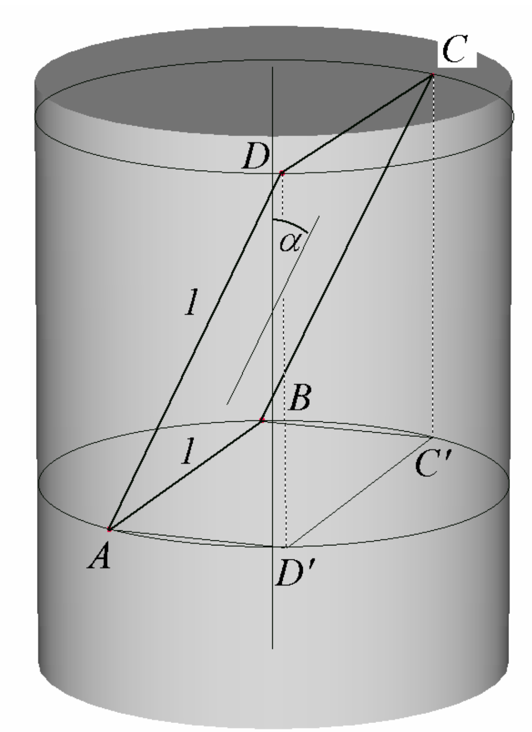
Je tedy $\cos\alpha = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^{\circ}$.

Komolý jehlan: je průnik jehlanového prostoru výše uvedenou vrstvou za předpokladu, že v této vrstvě neleží vrchol.

(Kruhová) válcová plocha, válec: Nechť je dán kruh a přímka s různoběžná s jeho rovinou. Sjednocení všech bodů ležících na všech přímkách rovnoběžných s s a protínajících daný kruh nazýváme **(kruhovým) válcovým prostorem**. Sjednocení všech bodů ležících na všech přímkách rovnoběžných s s a protínajících hraniční kružnici daného kruhu nazýváme **(kruhovou) válcovou plochou.** Průnik (kruhového) válcového prostoru s vrstvou, jejíž hraniční roviny jsou rovnoběžné s rovinou kruhu, nazýváme (kruhový) válec.

Existují i jiné válcové prostory a válce než kruhové (např. eliptické). O těchto útvarech však mluvit nebudeme a přívlastek „kruhový“ budeme proto vynechávat.

Průniky válcového prostoru s hraničními rovinami vrstvy se nazývají **podstavy**, vzdálenost rovin vrstvy se nazývá **výška** válce. Kružnice ohraničující podstavu se nazývá **podstavná hrana**. Každou úsečku, jejíž krajní body jsou na podstavných hranách a které jsou rovnoběžné s přímkou s nazýváme **stranou** válce. Množina všech bodů stran válce je jeho **plášť**.



Kolmý (rotační) válec – je válec, jehož strany jsou kolmé na podstavu.

4. Příklad: V rotačním válci je čtverec, jehož strany mají jednotkovou velikost a vrcholy se dotýkají pláště. Dvě protější strany čtverce jsou kolmé na osu válce, zbylé dvě s ní svírají úhel $\alpha = 60^\circ$. Určeme poloměr válce.

Řešení: Čtverec $ABCD$ promítněme kolmo do roviny rovnoběžné s rovinou podstavy. Průmětem je obdélník $ABC'D'$ vepsaný do kružnice o hledaném poloměru. Platí

$$\cos\alpha = \frac{|AD'|}{|AD|} \Rightarrow |AD'| = |AD|\cos\alpha = |AD|\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

Pak je

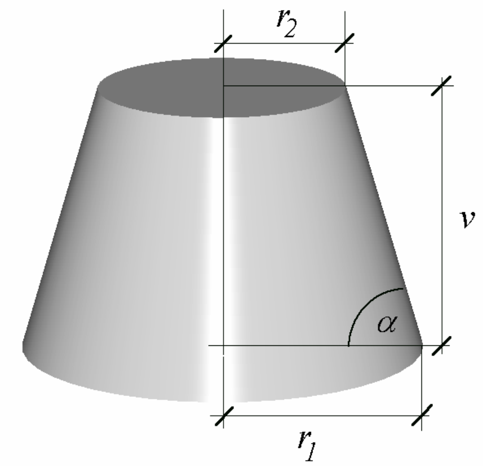
$$r = \frac{1}{2}|BD| = \frac{1}{2}\sqrt{|AB|^2 + |AD'|^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

(Kruhová) kuželová plocha, kužel: Nechť je dán kruh a bod a bod V, který neleží v jeho rovině. Sjednocení všech bodů ležících na všech přímkách procházejících bodem V a protínajících daný kruh nazýváme **(kruhovým) kuželovým prostorem**. Sjednocení všech bodů ležících na všech přímkách procházejících bodem V a protínajících hraniční kružnici daného kruhu daného kruhu nazýváme **(kruhovou) kuželovou plochou**. Bod V nazýváme vrcholem. Průnik (kruhového) kuželového prostoru s vrstvou, jejíž jedna hraniční rovina prochází vrcholem rovnoběžně s rovinou kruhu, nazýváme (kruhový) **kužel**.

Opět existují i jiné kuželové prostory než kruhové. Těmi se však zabývat opět nebudeme a přívlastek kruhový budeme proto opět vynechávat.

Podstava, výška, strana a plášť kužele se definuje analogicky jako u válce. Osa válce je spojnice středu podstavy a vrcholu.

Kolmý (rotační) kužel – je kužel, jehož osa je kolmá na podstavu.



Komolý kužel: je průnik kuželového prostoru výše uvedenou vrstvou za předpokladu, že v této vrstvě neleží vrchol.

5. Příklad: Rotační komolý kužel má podstavy o průměrech $250\ mm$ a $85\ mm$ a výšku $110\ mm$. Vypočtěme odchylku jeho strany od roviny podstavy.

Řešení: Zřejmě platí:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v}{r_1 - r_2} = \frac{110}{250-85} = \frac{110}{165} = 0.\overline{6} \Rightarrow \alpha = 33^\circ 41'$$

Kulová plocha, koule: Množina všech bodů v prostoru, které mají od daného pevného bodu S stálou vzdálenost, se nazývá **kulová plocha**. Bod S je střed, číslo r **poloměr** kulové plochy, značíme $\kappa(S;r)$. Množina všech bodů v prostoru, které mají od daného pevného bodu S vzdálenost menší nebo rovnu číslu r, se nazývá **koule**. Bod S je střed, číslo r poloměr koule.

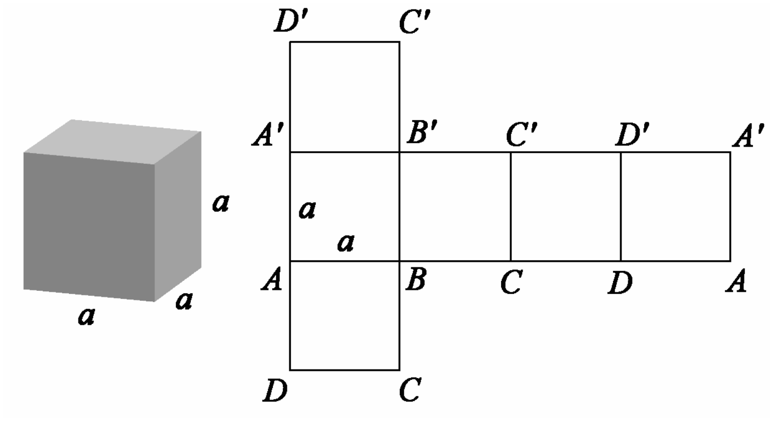
8.4 Objemy a povrchy těles

Objemem tělesa (značíme V) je **nezáporné** reálné **číslo**, které má následující vlastnosti:

1) Objemy shodných těles jsou si rovny
2) Je-li těleso $\mathbf{O}$ sjednocením těles $\mathbf{O}_1$; $\mathbf{O}_2$, jejichž průnikem je nejvýše jejich hranice, je objem tělesa $\mathbf{O}$ roven součtu objemů těles $\mathbf{O}_1$; $\mathbf{O}_2$.
3) Objem krychle o hraně $a = 1\ (m,\ cm, \ldots)$ je $V = 1\ (m^3,\ cm^3, \ldots)$

Povrchem tělesa budeme rozumět obsah hranice tělesa.

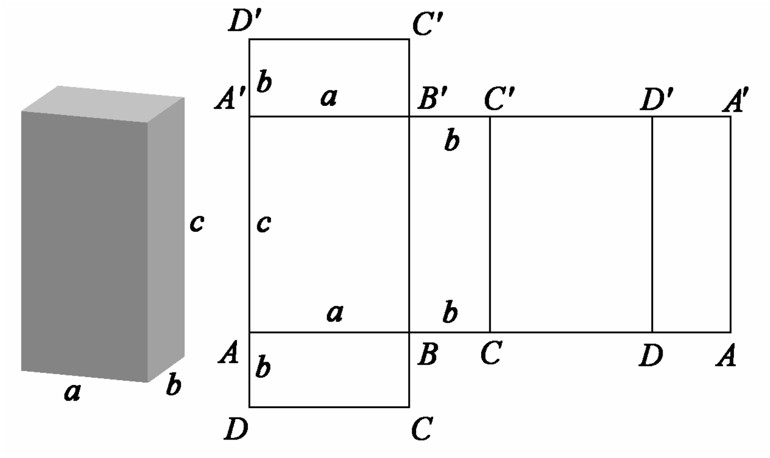
Přehled povrchů a objemů nejdůležitějších těles:



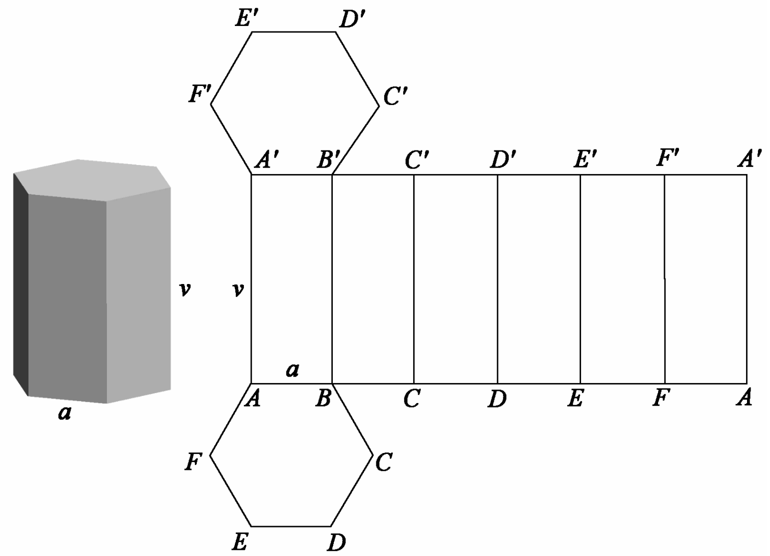
Krychle

$V = a^3$

$S = 6a^2$

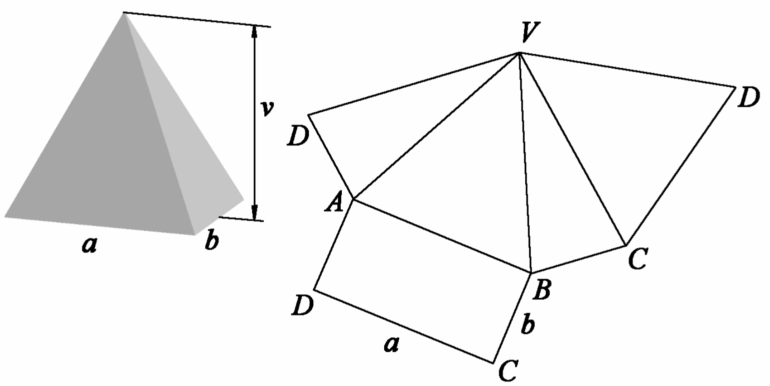


Kvádr
$V = abc$
$S = 2(ab + bc + ac)$



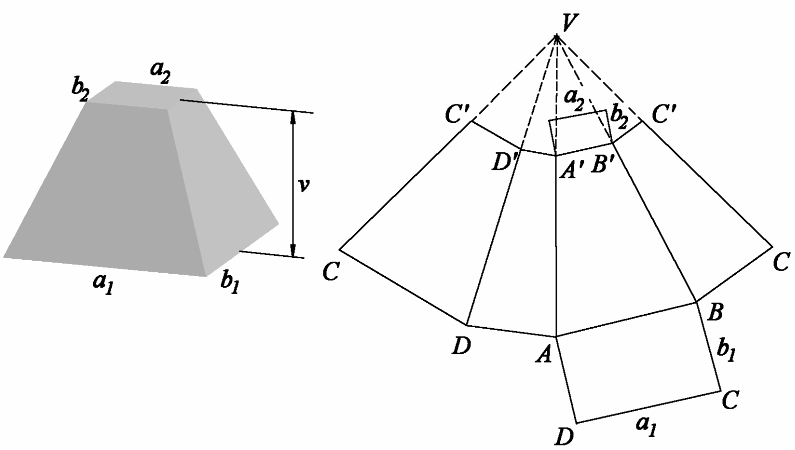
Pravidelný šestiboký hranol
$V = 3\sqrt{3} \cdot a^2 v$
$S = 6\left(\sqrt{3} \cdot a^2 + av\right)$

Obecný hranol
$V = S_P \cdot v$
$S = 2S_P + S_{pl}$



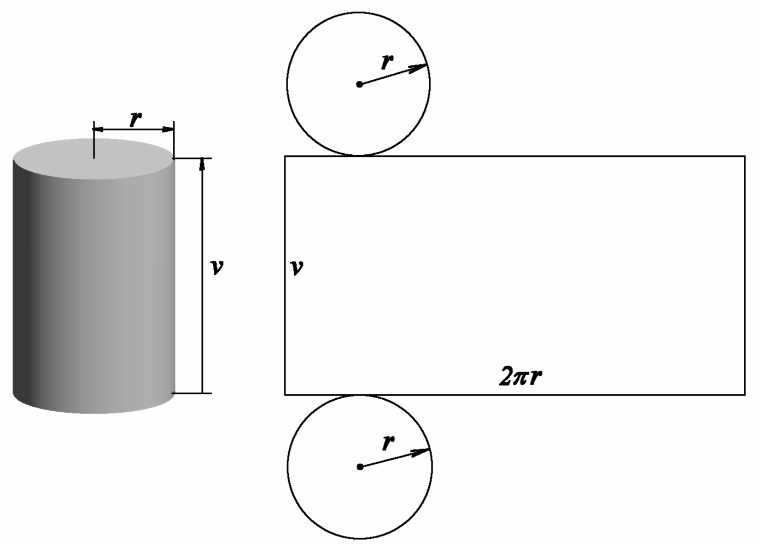
Čtyřboký jehlan
$V = \frac{1}{3} abv$
$S = ab + S_{pl}$

Obecný jehlan
$V = \frac{1}{3} S_P \cdot v$
$S = S_P + S_{pl}$



Komolý čtyřboký jehlan
$V = \frac{v}{3} \cdot$
$\left(a_1 b_1 + \sqrt{a_1 b_1 a_2 b_2} + a_2 b_2\right)$
$S = a_1 b_1 + a_2 b_2 + S_{pl}$

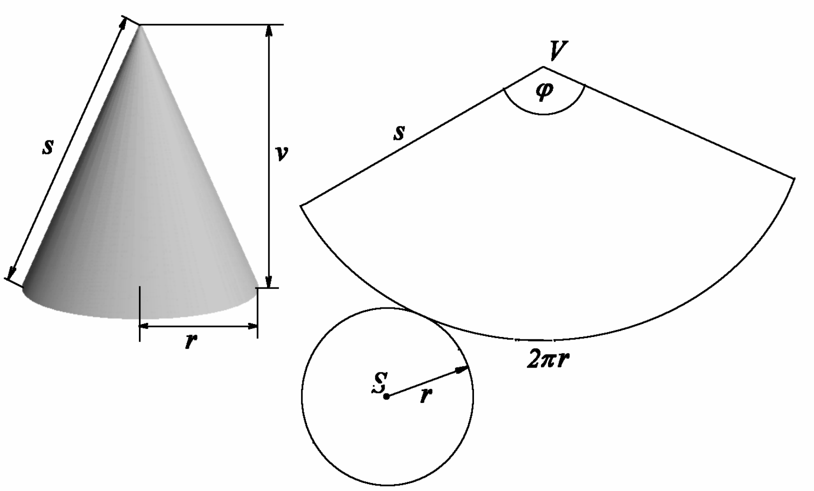
Obecný komolý Jehlan
$V = \frac{v}{3} \cdot \left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$
$S = S_1 + S_2 + S_{pl}$



Válec

$$V = \pi r^2 v$$

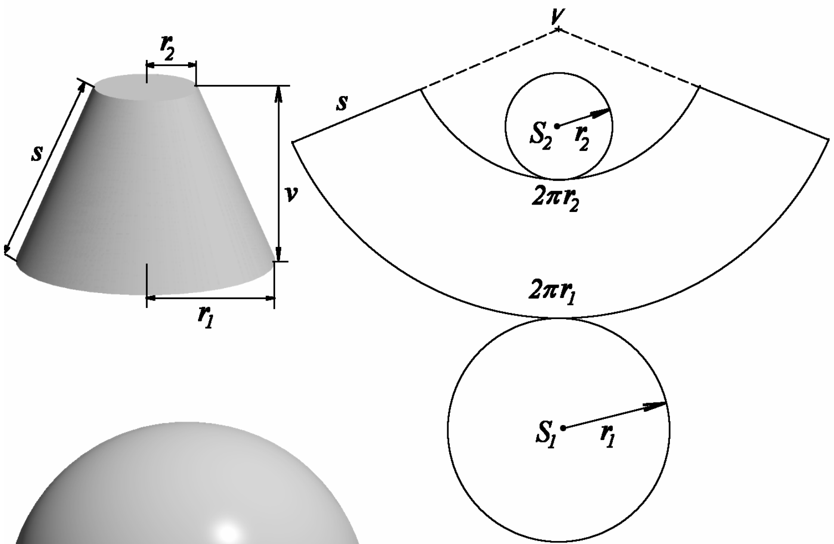
$$S = 2\pi r(r + v)$$



Kužel

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$$

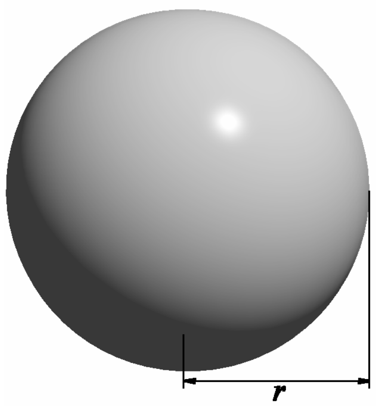
$$S = \pi r(r + s)$$



Komolý kužel

$$V = \frac{1}{3}\pi v\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)$$

$$S = \pi(r_1^2 + r_2^2 + r_1 s + r_2 s)$$



Koule

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$S = 4\pi r^2$$

1. Příklad: Úhlopříčný řez kvádru kolmý k podstavě je čtverec o obsahu $S = 4\ 225\ cm^2$. Hrana a podstavy kvádru je o $23\ cm$ delší než strana b. Určeme objem a povrch kvádru.
Řešení: Strana daného řezu je výškou kvádru a zároveň úhlopříčkou podstavy.
$c = \sqrt{S} = \sqrt{4\ 225} = 65\ cm$. Pro hrany a, b podstavy pak platí:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a^2 + (a-23)^2 = 4\ 225$$

$$2a^2 - 46a - 3\ 696 = 0$$

$a = 56\ cm; b = 33\ cm$ (záporný kořen samozřejmě nevyhovuje).

Je tedy: $V = abc = 56 \cdot 33 \cdot 65 = 120\ 120\ cm^3$;

$$S = 2(ab + ac + bc) = 2(56 \cdot 33 + 56 \cdot 65 + 33 \cdot 65) = 15\ 266\ cm^2$$

2. Příklad: Určeme rozměry nádoby tvaru válce o objemu 1 litr a výšce rovné dvojnásobku průměru podstavy.

Řešení: Platí: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$; $V = 1\ l = 1\ dm^3$; $v = 4r$. Je tedy

$$1 = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot (4r)$$

$$1 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}\ dm$$

$$v = 4r = 4\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}\ dm.$$

3. Příklad: Pravidelný komolý šestiboký jehlan má podstavné hrany $a_1 = 65$; $a_2 = 25$ a pobočnou hranu $b = 85$. Určeme jeho objem.

Řešení: Výška jehlanu je $v = \sqrt{b^2 - (a_1 - a_2)^2} = \sqrt{85^2 - (65-25)^2} = 75$. Obsahy podstav jsou: $S_1 = 3\sqrt{3}a_1^2 = 3\sqrt{3} \cdot 65^2$ resp. $S_2 = 3\sqrt{3}a_2^2 = 3\sqrt{3} \cdot 25^2$ a objem je tedy

$$V = \frac{v}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right) = \frac{75}{3} \cdot \left(3\sqrt{3} \cdot 65^2 + \sqrt{3\sqrt{3} \cdot 65^2 \cdot 3\sqrt{3} \cdot 25^2} + 3\sqrt{3} \cdot 25^2\right) \approx 841\ 127$$

4. Příklad: Určeme výšku a poloměr podstavy kužele, který má stejný objem jako válec o výšce $v = 4\ cm$ a poloměru podstavy $r = 5\ cm$.
Řešení: Označme $r_1; v_1$ poloměr podstavy resp. výšku hledaného kužele. Musí tedy platit:

$$\frac{1}{3}\pi r_1^2 v_1 = \pi r^2 v$$

$$\underline{\pi r_1^2 + \pi r_1 \sqrt{r_1^2 + v_1^2} = 2\pi r^2 + 2\pi r v}$$

$$\frac{1}{3} r_1^2 v_1 = 5^2 \cdot 4$$

$$\underline{r_1^2 + r_1\sqrt{r_1^2 + v_1^2} = 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 4}$$

$$\frac{1}{3} r_1^2 v_1 = 100 \Rightarrow v_1 = \frac{300}{r_1^2}$$

$$r_1^2 + r_1\sqrt{r_1^2 + v_1^2} = 90$$

Dosazením za v_1 do poslední rovnice tedy máme:

$$r_1^2 + r_1\sqrt{r_1^2 + \left(\frac{300}{r_1^2}\right)^2} = 90$$

$$r_1\sqrt{r_1^2 + \left(\frac{300}{r_1^2}\right)^2} = 90 - r_1^2$$

$$r_1^2 \cdot \left[r_1^2 + \left(\frac{300}{r_1^2}\right)^2\right] = 8\ 100 - 180r_1^2 + r_1^4$$

$$r_1^4 + \frac{90\ 000}{r_1^2} = 8\ 100 - 180r_1^2 + r_1^4$$

$$180r_1^4 - 8\ 100r_1^2 + 90\ 000 = 0 \quad (subst.\ r_1^2 = x)$$

$$18x^2 - 810x + 9\ 000 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{810 \pm \sqrt{810^2 - 4 \cdot 18 \cdot 9\ 000}}{2 \cdot 18} = \left\langle \begin{matrix} 25 \\ 20 \end{matrix} \right.$$

$$r_1^2 = x_1 = 25 \Rightarrow r_1 = 5\ cm$$

$$r_1^2 = x_2 = 20 \Rightarrow r'_1 = 2\sqrt{5}\ cm,$$

(ani zde samozřejmě záporné kořeny nepřicházejí v úvahu). Výšku kužele dopočítáme dosazením do vztahu

$$v_1 = \frac{300}{r_1^2} = \frac{300}{5^2} = 12\ cm;\ v'_1 = \frac{300}{\left(2 \cdot \sqrt{5}\right)^2} = 15\ cm$$

5. Příklad: Jakou hmotnost má kulečníková koule ze slonoviny, je-li délka její hlavní kružnice $16\ cm$ (hustota materiálu je $\rho = 19,2\ g \cdot cm^{-3}$)?

Řešení: Hlavní kružnice koule je nejdelší kružnice na jejím povrchu, její poloměr je tedy shodný s poloměrem koule: máme tedy $l = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{l}{2\pi} = \frac{16}{2\pi} = \frac{8}{\pi}$.

Ze známého vztahu $\rho = \frac{m}{V}$ je $m = V \cdot \rho = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{8}{\pi}\right)^3 \cdot 19.2 \approx 1\ 328g$.

6. Příklad: Model konstrukce je v měřítku 1:10. Kolikrát těžší bude skutečná konstrukce z téhož mareriálu?

Řešení: Při výpočtu objemu jakéhokoli tělesa je třeba třikrát mezi sebou násobit jeho rozměry - např kvádr: $V = \boxed{a \cdot b \cdot c}$, rotační kužel: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 v = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \boxed{r \cdot r \cdot v}$. Budou-li rozměry skutečné konstrukce desetkrát větší, součin v rámečku (a tím i objem) bude větší **tisíckrát**. Bude-li konstrukce z téhož materiálu, i její hmotnost bude větší tisíckrát.

Neřešené úlohy:

1) Vypočtěte objem kvádru jsou-li dány obsahy pobočných stěn $S_1 = 240$; $S_2 = 255$ a obsah podstavy $S = 272$.

2) Objem pravidelného čtyřbokého hranolu je $V = 192$, jeho podstavná hrana a výška jsou v poměru $1:3$. Vypočítejte povrch tělesa.

3) Určete tloušťku mosazné rourky, jejíž délka je $30\ cm$, vnější obvod $3,2\ cm$ a hmotnost $47,478\ g$ ($\rho = 8,5\ gcm^3$).

4) V pravidelném trojbokém jehlanu jsou pobočné hrany navzájem kolmé, velikost podstavné hrany je 30. Určete objem jehlanu.

5) Do koule, která má povrch $S = 200\ cm^2$ je vepsán rotační kužel, jehož úhel při vrcholu je $\varphi = 48^\circ 44'$. Určete objem kužele.

6) Určete hmotnost železného rotačního komolého kužele, jsou-li poloměry podstav $r_1 = 4\ cm$; $r_2 = 1.5\ cm$ a má-li strana kužele odchylku $\varphi = 28^\circ 26'$ od roviny podstavy ($\rho = 7.8\ gcm^3$).

7) Pravidelný čtyřboký hranol s postavnou hranou $a = 4,5$ je seříznut tak, že dvě jeho pobočné hrany mají délku $b = 2,4$ a dvě délku $c = 5,2$. Určete jeho objem a povrch.

8) Kolik m^3 zeminy je třeba vykopat, abychom dostali přímý $170\ m$ dlouhý výkop , jehož průřez je rovnoramenný lichoběžník se stranami $a = 150\ cm$; $b = 90\ cm$; $c = 80\ cm$; $a \parallel c$?

9) V nádrži tvaru rotačního válce s průměrem podstavy $d = 212\ cm$ je 111 litrů vody. V jaké výšce ode dna nádrže je hladina vody?

10) Určete objem pravidelného čtyřbokého jehlanu, je-li jeho podstavná hrana je $a = 8,25$ a odchylka pobočné **a)** hrany **b)** stěny od roviny podstavy je $56^\circ 36'$.

11) Určete objem tělesa vzniklého rotací ΔABC kolem strany a, je-li $b = 25$; $\alpha = 78^\circ$; $\gamma = 48^\circ$.

12) Rotační kužel o objemu V postavíme na vrchol a naplníme vrchovatě vodou. Nakloníme-li ho tak, ža jedna jeho strana je svislá, zůstane v něm V' vody. Určete úhel při vrcholu osového řezu!

13) Kouli je opsán rovnostranný válec ($2r = v$). Určete poměr
a) objemů **b)** povrchů těchto těles.

Výsledky:

1) $V = 4\ 080$ **2)** $S = 224$ **3)** $0,6\ mm$ **4)** $V \approx 1\ 597$ **5)** $V = 62,34\ cm^3$ **6)** $m = 270,6\ g$
7) $S \approx 112,5$; $V \approx 76,94$ **8)** $V = 162\ m^3$ **9)** $10\ cm$ **10 a)** $V \approx 173,2$ **b)** $V \approx 122,4$

11) $V \approx 10\ 922$ **12)** $\cos\omega = (V')^{\frac{2}{3}} \cdot V^{-\frac{2}{3}}$ **13) a)** $2:3$ **b)** $2:3$.